VNUHCM Journal of Advanced Research and Natural Sciences 2026, 10(3):3674-3683

Open Access Full Text Article

Bài nghiên cứu

SỰ SUY SỤP TỰ HẤP DẪN CỦA SAO BOSON BÁN TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Đình Thi Nguyễn[1,2]

Use your smartphone to scan this QR code and download this article

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu cơ chế sụp đổ tự hấp dẫn trong các sao boson thông qua một mô hình bán tương đối tính có nguồn gốc từ lý thuyết ngưng tụ Bose–Einstein. Mô hình được xây dựng từ phương trình Hartree bán tương đối tính với thế hấp dẫn Newton, trong đó động năng được biểu diễn bởi toán tử $\sqrt{-\Delta + m^2}$, với m là khối lượng hạt boson. Hệ này tồn tại một khối lượng tới hạn, tương tự như giới hạn Chandrasekhar đối với các sao fermion. Khi tổng khối lượng của ngôi sao boson tiến gần đến giá trị ngưỡng này, các nghiệm trạng thái cơ bản biểu hiện cơ chế tập trung khối lượng mạnh mẽ và xuất hiện hành vi tiệm cận đặc trưng. Mục tiêu chính của bài báo là mô tả chính xác quá trình này thông qua phân tích hành vi tiệm cận và cơ chế tập trung khối lượng khi tiến gần đến chế độ tới hạn. Phương pháp của chúng tôi chủ yếu dựa vào kỹ thuật giải tích biến phân, các bất đẳng thức hàm nội suy, và phân tích tỉ lệ của hàm năng lượng. Các kết quả thu được góp phần làm sáng tỏ bản chất toán học của hiện tượng sụp đổ tự hấp dẫn trong các hệ boson, đồng thời mở rộng các lý thuyết phi tương đối tính hiện có sang khuôn khổ (bán) tương đối tính. Ngoài ra, chúng cũng đóng góp vào việc mô tả định lượng cấu trúc của các sao boson và ngưng tụ Bose–Einstein tự hấp dẫn trong các chế độ năng lượng cao. Khung lý thuyết này có thể được xem như bước trung gian quan trọng giữa mô hình Hartree phi tương đối tính và các mô hình trường lượng tử đầy đủ trong vật lý thiên văn.

Từ khoá: Ngưng tụ Bose–Einstein, phương trình Hartree bán tương đối tính, sao boson, tự hấp dẫn

[1]*Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[2]*Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam.*

Liên hệ

Đình Thi Nguyễn, Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam.

Lịch sử

- Ngày nhận: 11-08-2025
- Ngày sửa đổi: 15-01-2026
- Ngày chấp nhận: 24-06-2026
- Ngày đăng: 14-07-2026

DOI : https://doi.org/10.32508/vnuhcmj-arns.v10i3.1494

Check for updates

Bản quyền

© Tạp chí ĐHQG Tp.HCM. Đây là bài báo công bố mở được phát hành theo các điều khoản của the Creative Commons Attribution 4.0 International license.

Trích dẫn bài báo này: Nguyễn D T. **SỰ SUY SỤP TỰ HẤP DẪN CỦA SAO BOSON BÁN TƯƠNG ĐỐI TÍNH**. *VNUHCM J. Adv. Res. Nat. Sci. 2026; 10(3):3674-3683.*

MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hiện tượng sụp đổ hấp dẫn của một ngôi sao boson bán tương đối tính trong khuôn khổ của lý thuyết xấp xỉ bán cổ điển. Trọng tâm là bài toán biến phân

$$E_\omega^{\mathrm{H}} := \inf\left\{\mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u] : u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 \mathrm{d}x = 1\right\}, \tag{1}$$

thường được gọi là năng lượng Hartree. Phiếm hàm năng lượng Hartree tương ứng được cho bởi

$$\mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u] := \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{4}} u(x)\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{\omega}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Ở đây, $m > 0$ biểu thị khối lượng của các hạt boson giống hệt nhau, và toán tử $\sqrt{-\Delta + m^2}$ được định nghĩa thông qua biến đổi Fourier, cụ thể là

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{4}} u(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{|2\pi k|^2 + m^2} |\hat{u}(k)|^2 \,\mathrm{d}k.$$

Hằng số liên kết $\omega > 0$ trong (2) biểu diễn cường độ của tương tác hấp dẫn Newton, và đóng vai trò quan trọng trong phân tích của chúng tôi.

Phiếm hàm năng lượng (2) mô tả năng lượng hiệu dụng trên mỗi hạt của một ngôi sao boson, được suy ra từ lý thuyết cơ học lượng tử nhiều hạt, và có thể được tìm thấy trong [1]. Trong bối cảnh này, ta có thể hiểu $\omega = gN$, trong đó g là hằng số hấp dẫn và N là số lượng hạt. Một thực tế cơ bản là ngôi sao boson sẽ sụp đổ khi N vượt quá một giá trị tới hạn, được gọi là giới hạn Chandrasekhar. Trong mô hình hiệu dụng (1), hiện tượng sụp đổ này được thể hiện đơn giản bởi $E_\omega^{\mathrm{H}} = -\infty$ khi ω vượt quá một giá trị tới hạn ω_c. Do tồn tại sự cân bằng giữa động năng và thế năng tương tác, giá trị tới hạn này được xác định một cách tự nhiên như là hằng số tối ưu trong bất đẳng thức nội suy

$$\frac{\omega_c}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \le \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} u(x)\right|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

với mọi $u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Ta đã được biết (xem, chẳng hạn, [2]) rằng bất đẳng thức (3) có hàm đạt cực trị, cụ thể là một hàm $Q \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, có thể chọn sao cho dương, đối xứng cầu và giảm dần. Ngoài ra, hàm này thỏa mãn các điều kiện chuẩn hóa:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |Q(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} Q(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{\omega_c}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|Q(x)|^2 |Q(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1. \tag{4}$$

Hơn nữa, $Q \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ là nghiệm dương của phương trình phi tuyến

$$\sqrt{-\Delta} Q + Q - \omega_c (|x|^{-1} * Q^2) Q = 0 \tag{5}$$

và có tính chất suy giảm đại số (xem, chẳng hạn, [3])

$$Q(x) \leq C(1+|x|)^{-4}.$$

Tính duy nhất (ngoại trừ phép tịnh tiến và co giãn) của hàm đạt cực trị cho (3), cũng như của nghiệm dương cho phương trình (5), vẫn là một vấn đề *mở* (xem [4] để biết thêm thảo luận). Trong phần sau, chúng tôi ký hiệu $\mathcal{K}$ là tập hợp tất cả các hàm dương, đối xứng cầu và giảm dần, thỏa mãn (4) và (5).

KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Mục tiêu nghiên cứu của chúng tôi là sự tồn tại và hành vi tiệm cận của các hàm cực tiểu Hartree trong chế độ sụp đổ. Ta có kết quả sau.

ĐỊNH LÝ 1.1. *Giả sử* $m > 0$. *Khi đó ta có các kết quả sau:*

i) *Bài toán biến phân* E_ω^{H} *trong* (1) *có cực tiểu (dương, đối xứng cầu, giảm dần) nếu và chỉ nếu* $0 < \omega < \omega_c$.

ii) *Cho dãy* $\{\omega_k\}$ *sao cho* $\omega_k \nearrow \omega_c$ *khi* $k \to \infty$, *và* u_{ω_k} *là dãy cực tiểu dương của* $E_{\omega_k}^{\mathrm{H}}$. *Khi đó tồn tại* $Q \in \mathcal{K}$ *sao cho, ngoại trừ phép tịnh tiến và chọn dãy con, ta có sự hội tụ mạnh trong* $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$,

$$\lim_{k\to\infty} \ell_k^{-\frac{3}{2}} u_{\omega_k}(\ell_k^{-1}\,\cdot) = Q \quad \text{với} \quad \ell_k = m\sqrt{\frac{\omega_c}{2}} \inf_{W\in\mathcal{K}} \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}W\right\|_{L^2} (\omega_c - \omega_k)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Ngoài ra, năng lượng Hartree có hành vi tiệm cận

$$\lim_{k\to\infty} \ell_k E_{\omega_k}^{\mathrm{H}} = m^2 \inf_{W\in\mathcal{K}} \left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}W\right\|_{L^2}^2. \tag{7}$$

Mệnh đề trong ĐỊNH LÝ 1.1(i) đã được nêu trong [1], nhưng không có chứng minh chi tiết. Hơn nữa, chứng minh của ĐỊNH LÝ 1.1(ii) có thể tìm thấy trong [5], dựa trên phân tích chi tiết của phương trình Euler–Lagrange tương ứng với hàm đạt cực tiểu u_ω của (1), tức là

$$(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} u_\omega - \omega(|u_\omega|^2 * |\cdot|^{-1}) u_\omega = \mu_\omega u_\omega.$$

Ở đây, nhân tử Lagrange được xác định, dưới sự ràng buộc $\|u_\omega\|_{L^2}^2 = 1$, bởi

$$\mu_\omega = E_\omega^{\mathrm{H}} - \frac{\omega}{2} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u_\omega(x)|^2 |u_\omega(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Mục tiêu của bài báo này là đưa ra một chứng minh thay thế cho ĐỊNH LÝ 1.1 bằng phương pháp giải tích biến phân, đồng thời khai thác tính chất đặc biệt của các cực tiểu Hartree là đối xứng cầu và giảm dần. Khác với hướng tiếp cận sử dụng phương trình Euler–Lagrange như trong [5], bài báo này sử dụng trực tiếp phương pháp giải tích biến phân, các bất đẳng thức hàm nội suy, và phân tích tỉ lệ của hàm năng lượng. Điều này giúp bài toán trở nên tự nhiên hơn từ góc độ năng lượng và tránh được một số phức tạp kỹ thuật khi xử lý phương trình đạo hàm riêng phi tuyến như cách tiếp cận truyền thống Euler–Lagrange trong [5].

HƯƠNG PHÁP VÀ CHỨNG MINH

Sự tồn tại của các cực tiểu Hartree

Trước hết, ta chứng minh sự không tồn tại cực tiểu khi $\omega \geq \omega_c$ trong ĐỊNH LÝ 1.1(i). Giả sử $Q \in \mathcal{K}$. Ta sử dụng nguyên lý biến phân, và bất đẳng thức toán tử

$$\sqrt{-\Delta + m^2} \leq \sqrt{-\Delta} + \frac{m^2}{2\sqrt{-\Delta}}, \tag{8}$$

có thể được chứng minh dễ dàng bằng biến đổi Fourier. Khi đó, ta có

$$0 \leq E_\omega^{\mathrm{H}} \leq \mathcal{E}_{\omega_c}^{\mathrm{H}}\left[\ell^{\frac{3}{2}} Q(\ell\,\cdot)\right] \leq \ell\left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right) + \frac{m^2}{2\ell}\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{4}} Q\right\|_{L^2}^2.$$

Lấy giới hạn $\ell \to \infty$, ta thu được

$$E_\omega^{\mathrm{H}} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \omega = \omega_c \\ -\infty & \text{nếu } \omega > \omega_c \end{cases}.$$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng bài toán biến phân (1) có cực tiểu với mọi $0 < \omega < \omega_c$. Trước hết, ta nhận thấy rằng $E_\omega^{\mathrm{H}} < m$. Để thấy điều này, ta dùng bất đẳng thức toán tử

$$\sqrt{-\Delta + m^2} \leq m + \frac{-\Delta}{2m}, \tag{9}$$

cũng có thể được chứng minh bằng biến đổi Fourier. Khi đó, bởi nguyên lý biến phân và một phép tỷ lệ đơn giản, ta có

$$E_\omega^{\mathrm{H}} \leq \mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}\left[\ell^{\frac{3}{2}} \phi(\ell\,\cdot)\right] \leq m + \frac{\ell^2}{2m}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x - \frac{\ell\omega}{2}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|\phi(x)|^2|\phi(y)|^2}{|x-y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < m,$$

với $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ là hàm trơn cố định thoả $\|\phi\|_{L^2}^2 = 1$, và $\ell = \ell(\omega, \phi) > 0$ được chọn đủ nhỏ.

Bây giờ ta có thể chứng minh sự tồn tại của cực tiểu Hartree khi $0 < \omega < \omega_c$ bằng phương pháp giải tích biến phân. Trước hết, ta nhận thấy rằng các cực tiểu Hartree (nếu tồn tại) có thể được chọn đối xứng cầu và giảm theo bán kính, nhờ bất đẳng thức sắp xếp lại (xem, chẳng hạn, [6]). Gọi $\{u_n\}$ là một dãy (đối xứng cầu, giảm theo bán kính) cực tiểu hoá cho E_ω^{H}, tức là $\|u_n\|_{L^2}^2 = 1$ và

$$E_\omega^{\mathrm{H}} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u_n].$$

Từ (3), ta có

$$\mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u_n] \geq \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} u_n\right|^2.$$

Điều này cho thấy $\{u_n\}$ bị chặn đều trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Sau khi tịnh tiến (nếu cần) và trích ra một dãy con, ta có $u_n \to u_0$ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, và hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^3$. Mặt khác, do phép nhúng Sobolev, $\{u_n\}$ cũng bị chặn đều trong $L^2 \cap L^3(\mathbb{R}^3)$. Vì $\{u_n\}$ là dãy dương, đối xứng cầu và giảm, ta suy ra

$$|u_n(x)|^p \leq |B_{\mathbb{R}^3}(0,x)|^{-1} \int_{|y|\leq|x|} |u_n(y)|^p \, \mathrm{d}y \leq |B_{\mathbb{R}^3}(0,1)|^{-1}|x|^{-3}\|u_n\|_{L^p}^p$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ và $2 \leq p \leq 3$. Do đó, ta có ước lượng đều theo n:

$$|u_n(x)| \lesssim \min\left\{|x|^{-\frac{3}{2}}, |x|^{-1}\right\} =: f(x).$$

Ngoài ra, dễ thấy rằng, với mọi $2 < q < 3$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)^q \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Theo định lý hội tụ bị chặn, ta có $u_n \to u_0$ mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ với mọi $2 < q < 3$. Nhờ tính chất hội tụ tốt nói trên, ta sẽ chứng minh được rằng u_0 thực sự là cực tiểu của E_ω^{H}. Trước hết, $u_0 \not\equiv 0$, nếu không, theo bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev (xem, chẳng hạn, [6]), ta sẽ có

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|u_n(x)|^2|u_n(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0$$

và do đó, với điều kiện chuẩn hóa $\|u_n\|_{L^2}^2 = 1$,

$$E_\omega^{\mathrm{H}} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u_n] = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{4}} u_n(x)\right|^2 \, \mathrm{d}x \geq m.$$

Điều này trái với $E_\omega^{\mathrm{H}} < m$ mà ta đã quan sát trước đó. Bây giờ, ta định nghĩa phiếm hàm năng lượng Hartree hiệu chỉnh

$$\mathcal{F}_\omega^{\mathrm{H}}[u] := \mathcal{E}_\omega^{\mathrm{H}}[u] - m \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Chú ý rằng năng lượng liên kết tương ứng F_ω^{H} thoả

$$F_\omega^{\mathrm{H}} := \inf\left\{\mathcal{F}_\omega^{\mathrm{H}}[u] : u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 = 1\right\} = E_\omega^{\mathrm{H}} - m < 0.$$

Sử dụng bổ đề Fatou cho phần động năng hiệu chỉnh, bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev cho phần tương tác, tính hội tụ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ cùng với hội tụ mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ (với $2 < q < 3$), ta thu được

$$E_\omega^{\mathrm{H}} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_\omega^{\mathrm{H}}[u_n] + m \geq \mathcal{F}_\omega^{\mathrm{H}}[u_0] + m = \|u_0\|_{L^2}^2 \mathcal{F}_\omega^{\mathrm{H}}\left[\frac{u_0}{\|u_0\|_{L^2}}\right] + m \geq \|u_0\|_{L^2}^2 F_\omega^{\mathrm{H}} + m$$
$$\geq F_\omega^{\mathrm{H}} + m = E_\omega^{\mathrm{H}}.$$

Ở đây, ta đã dùng $0 < \|u_0\|_{L^2}^2 \leq 1$, bởi bổ đề Fatou và sự hội tụ yếu trong L^2, và $F_\omega^{\mathrm{H}} < 0$. Vì vậy, mọi dấu bằng phải xảy ra, và ta phải có $\|u_0\|_{L^2}^2 = 1$. Điều này chứng minh rằng u_0 là cực tiểu của E_ω^{H}.

Hành vi của cực tiểu Hartree

Trong tiểu mục này, chúng tôi chứng minh hành vi suy sụp của các cực tiểu của E_ω^{H} trong ĐỊNH LÝ 1.1(ii).

Giả sử $\omega_k \nearrow \omega_c$ khi $k \to \infty$ và đặt $u_k := u_{\omega_k}$ là cực tiểu dương của $E_{\omega_k}^{\mathrm{H}}$. Trước hết, ta tính cận trên chính xác cho $E_{\omega_k}^{\mathrm{H}}$. Lấy $W \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ thì W thỏa mãn (4) và (5). Từ (8), ta có

$$E_{\omega_k}^{\mathrm{H}} \leq \mathcal{E}_{\omega_k}^{\mathrm{H}}\left[\ell^{\frac{3}{2}} W(\ell\,\cdot)\right] \leq \frac{m^2}{2\ell}\left\|(-\Delta)^{-\frac{1}{4}} W\right\|_{L^2}^2 + \ell\,\frac{\omega_c - \omega_k}{\omega_c}.$$

Tối ưu hóa theo mọi $\ell > 0$ và $W \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$, ta thu được cận trên năng lượng mong muốn trong (7). Ta chứng minh cận dưới tương ứng của năng lượng trong (7) bằng cách chứng minh sự hội tụ của các cực tiểu.

Trong phần tiếp theo, ta chứng minh rằng dãy cực tiểu $\{u_k\}$ suy sụp theo nghĩa là động năng tiến đến vô hạn. Độ dài suy sụp hiệu chỉnh được xác định bởi hạng tử động năng, và sẽ được nhận dạng với độ dài suy sụp gốc. Ta có kết quả sau.

BỔ ĐỀ 2. *Đặt* $\delta_k^{-1} := \left\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} u_k\right\|_{L^2}^2$. *Khi đó các mệnh đề sau đúng:*

i) $\delta_k \to 0$ *khi* $k \to \infty$.

ii) *Tồn tại* $Q \in \boldsymbol{\mathcal{K}}$ *sao cho, sau khi tịnh tiến và trích ra một dãy con, ta có sự hội tụ mạnh* $\lim_{k\to\infty} \delta_k^{\frac{3}{2}} u_k(\delta_k\,\cdot) = Q$ *trong* $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Chứng minh.

i) Giả sử ngược lại rằng, sau khi trích một dãy con, $\{u_k\}$ bị chặn đều trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Khi đó tồn tại $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ sao cho, sau khi tịnh tiến và trích một dãy con, $u_k \to u_0$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^3$ và hội tụ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Thực tế, sự hội tụ này là mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ với mọi $2 < q < 3$, vì $\{u_k\}$ là dãy hàm dương, đối xứng cầu và giảm dần. Nếu $u_0 \equiv 0$ thì theo bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev, ta có

$$\lim_{k\to\infty} E_{\omega_k}^{\mathrm{H}} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{4}} u_k(x)\right|^2 \mathrm{d}x \geq m.$$

Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với cận trên của năng lượng Hartree trong (7). Do đó, $u_0 \not\equiv 0$. Tại bước này, ta sử dụng bổ đề Fatou, bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev,

sự hội tụ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, cùng với hội tụ mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ (với $2 < q < 3$) của u_k đến u_0. Ta thu được

$$\lim_{k\to\infty} E^{\mathrm{H}}_{\omega_k} \geq \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_c}[u_0] > \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_c}[u_0]\big|_{m=0} \geq 0,$$

trong đó ta đã sử dụng (3) ở bất đẳng thức cuối cùng, cùng với thực tế $0 < \|u_0\|^2_{L^2} \leq 1$, bởi bổ đề Fatou. Một lần nữa, điều này mâu thuẫn với cận trên năng lượng trong (7). Suy ra rằng ta phải có $\delta_k \to 0$ khi $k \to \infty$.

ii) Đặt $w_k := \delta_k^{\frac{3}{2}} u_k(\delta_k \cdot)$ và viết lại hàm năng lượng:

$$\delta_k E^{\mathrm{H}}_{\omega_k} \geq \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_k}[w_k]\big|_{m=0}.$$

Hiển nhiên rằng $\{w_k\}$ bị chặn đều trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ vì

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_k\right\|^2_{L^2} = 1 = \|w_k\|^2_{L^2}.$$

Hơn nữa, vì dãy $\{u_k\}$ có tính dương, đối xứng tâm và giảm theo bán kính, nên dãy $\{w_k\}$ cũng có các tính chất đó. Do đó, tồn tại $w_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ sao cho, sau khi tịnh tiến và trích dãy con, $w_k \to w_0$ hầu khắp nơi trong $\mathbb{R}^3$, hội tụ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, và mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ với mọi $2 < q < 3$. Nếu $w_0 \equiv 0$ thì theo bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k E^{\mathrm{H}}_{\omega_k} \geq \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_k}[w_k]\Big|_{m=0} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_k(x)\right|^2 \mathrm{d}x = 1.$$

Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với thực tế rằng $\delta_k E^{\mathrm{H}}_{\omega_k} \to 0$ khi $k \to \infty$, theo cận trên năng lượng trong (7). Do đó, $w_0 \not\equiv 0$. Bây giờ, ta lại sử dụng bổ đề Fatou, bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev, sự hội tụ yếu trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, cùng sự hội tụ mạnh trong $L^q(\mathbb{R}^3)$ (với $2 < q < 3$) của w_k đến w_0. Ta có

$$0 = \lim_{k\to\infty} \delta_k E^{\mathrm{H}}_{\omega_k} \geq \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_k}[w_k]\Big|_{m=0} \geq \mathcal{E}^{\mathrm{H}}_{\omega_c}[w_0]\big|_{m=0} \geq \left(1 - \|w_0\|^2_{L^2}\right) \left\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_0\right\|^2_{L^2} \geq 0,$$

trong đó ta đã sử dụng (3) ở bất đẳng thức cuối cùng, cùng với $0 < \|w_0\|^2_{L^2} \leq 1$, bởi bổ đề Fatou. Đẳng thức phải xảy ra trong biểu thức trên. Do đó, $\|w_0\|^2_{L^2} = 1$ và $\left\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_k\right\|^2_{L^2}$ hội tụ đến $\left\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}} w_0\right\|^2_{L^2}$ khi $k \to \infty$. Theo bổ đề Brezis–Lieb [7], ta kết luận rằng w_k hội tụ mạnh đến w_0 trong $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Điều này kết thúc chứng minh BỔ ĐỀ 2.

Bây giờ, ta quay lại chứng minh kết quả chính. Lấy ℓ_k như trong (6) và đặt $w_k = \delta_k^{\frac{3}{2}} u_k(\delta_k \cdot)$ là dãy trong BỔ ĐỀ 2. Sử dụng bất đẳng thức toán tử

$$\sqrt{-\Delta + m^2} \geq \sqrt{-\Delta} + \frac{m^2}{2\sqrt{-\Delta + m^2}},$$

có thể được chứng minh bằng biến đổi Fourier, ta có

$$E_{\omega_k}^{\mathrm{H}} \geq \delta_k \frac{m^2}{2} \left\| (-\Delta + m^2\delta_k^2)^{-\frac{1}{4}} w_k \right\|_{L^2}^2 + \frac{\omega_c - \omega_k}{2\delta_k} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|w_k(x)|^2 |w_k(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{11}$$

Theo bổ đề Fatou, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \left\| (-\Delta + m^2\delta_k^2)^{-\frac{1}{4}} w_k \right\|_{L^2}^2 \geq \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} Q \right\|_{L^2}^2 \geq \inf_{W\in\mathcal{K}} \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} W \right\|_{L^2}^2. \tag{12}$$

Theo bất đẳng thức Hardy–Littlewood–Sobolev, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|w_k(x)|^2 |w_k(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|Q(x)|^2 |Q(y)|^2}{|x-y|} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{13}$$

Nhân hai vế của (11) với ℓ_k, sử dụng cận trên năng lượng Hartree trong (7), cùng với (12), (13), và (4), ta suy ra rằng

$$1 \geq \frac{\ell_k \delta_k}{2} \big(1 + o(1)\big) + \frac{1}{2\ell_k \delta_k} \big(1 + o(1)\big). \tag{14}$$

Vì vế trái là hữu hạn và không phụ thuộc vào k, ta kết luận rằng $\ell_k \delta_k$ bị chặn đều cả trên và dưới. Đặc biệt, tồn tại hằng số dương $\lambda > 0$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} \ell_k \delta_k = \lambda > 0.$$

Lấy giới hạn $k \to \infty$ trong (14), ta được

$$1 \geq \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda} \geq 1. \tag{15}$$

Ở đây ta đã dùng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz trong bất đẳng thức thứ hai của (15). Do đó, đẳng thức trong (15) phải xảy ra với giá trị tối ưu $\lambda = 1$. Điều này xác định độ dài suy sụp δ_k trong BỔ ĐỀ 2 trùng với ℓ_k^{-1} trong (6).

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) theo nhiệm vụ khoa học công nghệ mã số C2025-18-38.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. E. H. Lieb, H.-T. Yau, "The Chandrasekhar theory of Stellar Collapse as the Limit of Quantum Mechanics", Communications in Mathematical Physics, vol. 112, no. 1, p. 147–174, 1987.
2. E. Lenzmann, "Well-posedness for semi-relativistic Hartree equations of critical type", Mathematical Physics, Analysis and Geometry, vol. 10, no. 1, p. 43–64, 2007.
3. R. L. Frank, E. Lenzmann, "On ground states for the L^2-critical boson star equation", arXiv:0910.2721, 2010.

4. E. Lenzmann, "Uniqueness of Ground States for Pseudo-Relativistic Hartree Equations", Analysis & PDE, vol. 2, no. 1, p. 1–27, 2009.
5. D.-T. Nguyen, "On Blow-up Profile of Ground States of Boson Stars with External Potential", Journal of Statistical Physics, vol. 169, no. 2, p. 395–422, 2017.
6. E. H. Lieb, M. Loss, "Analysis", vol. 14 of Graduate Studies in Mathematics, Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.
7. H. Brezis, E. H. Lieb, "A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals", Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 88, no. 3, p. 486–490, 1983.

VNUHCM Journal of Advanced Research and Natural Sciences 2026, 10(3):3674-3683
Open Access Full Text Article

Research Article

SELF-GRAVITATION COLLAPSE OF SEMI-RELATIVISTIC BOSON STARS

DInh Thi Nguyen[1,2]

Use your smartphone to scan this QR code and download this article

ABSTRACT
This paper investigates the gravitational collapse mechanism in boson stars through a semi-relativistic model derived from Bose–Einstein condensation theory. The model is built upon a semi-relativistic Hartree equation with Newtonian gravitational potential, where the kinetic operator is given by $\sqrt{-\Delta + m^2}$, with m denoting the boson mass. This system possesses a critical mass threshold, analogous to the Chandrasekhar limit for fermion stars. As the total mass of the boson star approaches this critical value, the ground-state solutions exhibit strong mass concentration and characteristic asymptotic behavior. The main objective of the paper is to provide a precise description of this phenomenon. Our approach relies primarily on variational analytic techniques, interpolation functional inequalities, and scaling analysis of the energy functional. The results obtained shed light on the mathematical nature of gravitational collapse in bosonic systems and extend existing non-relativistic theories to the (semi-) relativistic framework. Moreover, they contribute to a quantitative understanding of the structure of boson stars and self-gravitating Bose–Einstein condensates in high-energy regimes. This theoretical framework can be viewed as an important intermediate step between the non-relativistic Hartree model and fully relativistic quantum field models in astrophysics.
Key words: Bose-Einstein condensates, semi-relativistic Hartree equation, boson stars, self-gravitating

[1]*Faculty of Mathematics - Computer Science, University of Science, Ho Chi Minh City, Vietnam*

[2]*Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam.*

Email: ndthi@hcmus.edu.vn

History
- Received: 11-08-2025
- Revised: 15-01-2026
- Accepted: 24-06-2026
- Published Online: 14-07-2026

DOI : https://doi.org/10.32508/vnuhcmj-arns.v10i3.1494

Check for updates

Copyright
© VNUHCM Journal. This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International license.

Cite this article : Nguyen D.T **SELF-GRAVITATION COLLAPSE OF SEMI-RELATIVISTIC BOSON STARS**.*VNUHCM J. Adv. Res. Nat. Sci. 2026; 10(3):3674-3683.*